

# A 级贝塞尔曲线的交互式控制生成方法

张志毅\* 杨 溪

(西北农林科技大学信息工程学院 陕西 西安 712100)

**摘 要** 在介绍 A 级贝塞尔曲线的定义和性质的基础上,探讨如何通过简单的交互式控制来生成平面和空间的 A 级贝塞尔曲线的理论基础和实现方法。通过解明 A 级贝塞尔曲线与对数螺线的关系,阐述用对数曲率/挠率图直观表示 A 级贝塞尔曲线曲率/挠率单调性的基本原因。最后总结上述工作并提出进一步的研究方向。

**关键词** A 级贝塞尔曲线 曲率/挠率单调 对数曲率/挠率图 交互式控制

中图分类号 TP391 文献标识码 A DOI: 10.3969/j.issn.1000-386x.2014.02.028

## INTERACTIVELY CONTROLLED GENERATION METHOD FOR CLASS A BEZIER CURVE

Zhang Zhiyi\* Yang Xi

(School of Information Engineering, Northwest A&F University, Xi'an 712100, Shaanxi, China)

**Abstract** In this paper we first introduce the definition and properties of Class A Bézier curve, based on it, we then discuss the theoretical foundation and implementation method in regard to how to generate planar and spatial Class A Bézier curve by simple interactive control. Through unriddling the relationship of Class A Bézier curve and logarithmic spiral, we expound the basic reason of intuitively representing the curvature/torsion monotonicity of Class A Bézier curve with LCG/LTG. In end of the paper, we summarise above works and present further study direction.

**Keywords** Class A Bézier curve Curvature/torsion monotonicity LCG/LTG Interactive control

### 0 引 言

在汽车和飞机造型设计中,需要用到很多曲率比较“美”的曲面。而“美”的曲线段应具有一些区域的曲率单调性,对于空间曲线在强调曲率单调性的同时也需保证挠率单调性<sup>[1]</sup>。2006年, Farin 定义了一类曲率和挠率都单调的 A 级贝塞尔曲线<sup>[2]</sup>。2007年, CAO 对 A 级贝塞尔曲线的性质做了细致地分析<sup>[3]</sup>。在实际的方案设计中,需要对这些曲线进行简单有效地控制,所需曲线往往是由曲线两端点的切向量决定的,所以 Yoshida, Hiraiwa 和 Saito 等人提出了一些基于曲线端点切向量交互式控制平面和空间 A 级贝塞尔曲线的方法<sup>[4-9]</sup>。

本文在介绍 A 级贝塞尔曲线的定义和性质的基础上,说明交互式控制平面和空间 A 级贝塞尔曲线的理论方法。通过阐述 A 级贝塞尔曲线与对数螺线的关系,解明用对数曲率/挠率图直观表示 A 级贝塞尔曲线曲率/挠率单调性的基本原因。最后通过一些实验结果做出分析并提出了今后的研究方向。

### 1 A 级贝塞尔曲线的定义及性质

对于  $n$  次的贝塞尔曲线:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) b_i \quad (1)$$

设  $\Delta b_j = b_{j+1} - b_j$  时,有旋转矩阵  $M$  使得:

$$\Delta b_j = M^j \Delta b_0 \quad i = 0 \cdots n-1 \quad (2)$$

当  $t \in [0, 1]$  时,对于任意单位向量  $v$ , 矩阵  $M$  满足:

$$|(1-t)v + tMv| \geq |v| \quad (3)$$

则这条曲线是由一系列控制点  $b_i$  定义的 A 级贝塞尔曲线<sup>[2]</sup>。此时,旋转矩阵  $M$  满足以下两个条件:

1) 矩阵  $M^T + M - 2I$  和  $M^T M - I$  的特征值必均为非负。这里  $I$  为一个单位矩阵。

2) 矩阵  $M$  必映射到单位球体外的任一点。即:  $M$  的奇异值  $\delta_1, \delta_2$  应不小于 1。

若旋转矩阵  $M$  是由旋转角  $\theta < \pi/2$  和一个尺度因子  $s$  组成,则满足下列条件:

$$\cos\theta > 1/s (s > 1) \text{ 或 } \cos\theta > s (s < 1) \quad (4)$$

的矩阵  $M$  被称为 A 级矩阵。由 A 级矩阵即可产生 A 级贝塞尔曲线<sup>[2]</sup>。

### 2 交互控制典型平面 A 级贝塞尔曲线

为便于交互式控制,最简单的方法是根据已知曲线段两端点的切线方向来生成 A 级贝塞尔曲线<sup>[4-9]</sup>。为实现像控制一条二次曲线一样的方法,去控制一条  $n$  次的典型 A 级贝塞尔曲线,我们指定三个平面交互控制点来定义曲线段两端点的切线

收稿日期: 2012-08-30。教育部留学回国人员科研启动基金项目(K314020901); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(Z109021004)。张志毅,副教授,主研领域:计算机辅助几何设计。杨溪,学士。

方向。如图 1 所示  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  为产生  $n$  次典型 A 级贝塞尔曲线的三个交互控制点。要生成一条以  $\alpha_0, \alpha_2$  为终点,且在两终点分别以  $\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_1$  的方向为曲线切向量方向的曲线,就要计算出曲线的控制点系列  $b_0, b_1, \dots, b_n$ ,由上可知  $b_0 = \alpha_0, b_n = \alpha_2$ 。假设满足式(4)的典型的 A 级旋转矩阵  $M$  是:

$$M = \begin{bmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta \\ s \sin \theta & s \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

此处  $\theta$  是向量  $\alpha_1 - \alpha_0$  与  $\alpha_2 - \alpha_1$  夹角除以  $n - 1$  的角度。设  $b_0 = |\Delta b_0|(\Delta b_0 = b_1 - b_0)$   $\mu = (\alpha_1 - \alpha_0) / |\alpha_1 - \alpha_0|$ ,即可得到下式来计算  $b_0$  和  $s$ :

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_0 M^j \mu = (a_2 - a_0) \quad (6)$$

当  $n=3$  时,上式为二次的方程可以直接解得。当  $n > 3$  时,我们可以将式(6)改写为:

$$f(b_0, s) = \sum_{j=0}^{n-1} b_0 M^j \mu - (a_2 - a_0) \quad (7)$$

当式(7)趋近于零向量时,可用多维共轭梯度法或下降单纯型法<sup>[10-12]</sup>进行最优化求解。求得  $b_0$  和  $s$  后,其它所有控制点都可以用式(8)来计算。

$$b_i = b_0 + \sum_{j=0}^{i-1} b_0 M^j \mu \quad 0 < i \leq m \quad (8)$$

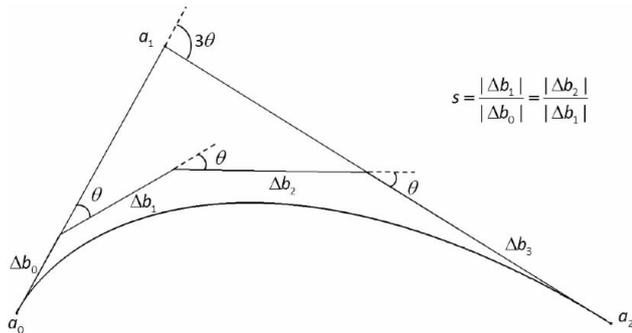


图 1 交互控制生成平面典型 A 级贝塞尔曲线

### 3 交互控制典型空间 A 级贝塞尔曲线

当用类似于平面上控制二维的 A 级贝塞尔曲线的方法来控制空间曲线的生成时,需指定四个空间交互控制点  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。以  $\alpha_0, \alpha_3$  为曲线段的两个终点,以  $\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_3 - \alpha_2$  方向为曲线两终点的切向量方向来确定曲线,如图 2 所示。产生曲线的矩阵  $M$  就为一个  $3 \times 3$  矩阵,同样由一个绕某个轴的旋转因子和一个尺度因子组成。设  $s, \theta, \mu = [u_0, u_1, u_2]$  ( $|\mu| = 1$ ) 分别为尺度因子,旋转角度和旋转轴。则  $M$  可以表示为:

$$M = RS \quad (9)$$

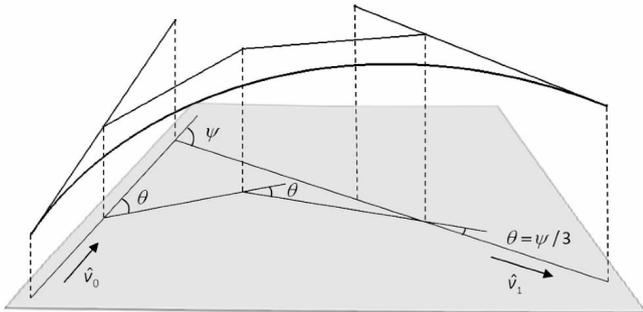


图 2 交互控制生成空间典型 A 级贝塞尔曲线

其中:

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$R = I + (\sin \theta) A + (1 - \cos \theta) A^2 \quad (11)$$

这里  $I$  是一个单位矩阵,矩阵  $A$  为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_2 & -u_1 \\ -u_2 & 0 & u_0 \\ u_1 & -u_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

计算两终点单位切向量后可得  $b_0 = \alpha_0, b_n = \alpha_3, v_0 = \Delta b_0 / |\Delta b_0|, v_1 = \Delta b_{n-1} / |\Delta b_{n-1}|$ 。而  $b_1 = b_0 + b_0 v_0$ ,其中  $b_0 = |\Delta b_0|$ 。因  $b_0$  只影响曲线的长度变化,所以我们可以先假设  $b_0 = 1$ 。当曲线被确定时  $b_0$  可以用  $(\alpha_3 - \alpha_0) / |b_n - b_0|$  计算出。为确定矩阵  $M$ ,如图 3 所示,由式(2)和式(9)可得:

$$v_1 = R^{n-1} v_0 \quad (13)$$

式中表示  $R$  中的旋转轴  $u$  在分别与  $v_0, v_1$  成等角的平面上。假设  $u' = v_1 \times v_0$ ,则旋转轴  $u$  就可由  $u'$  绕轴  $v_0 - v_1$  旋转  $\phi$  角得到,并可由式(14)来计算:

$$u = (v_0 \times v_1) / |v_0 \times v_1| \cos \phi + (v_0 + v_1) / |v_0 + v_1| \cos(\pi/2 - \phi) \quad (14)$$

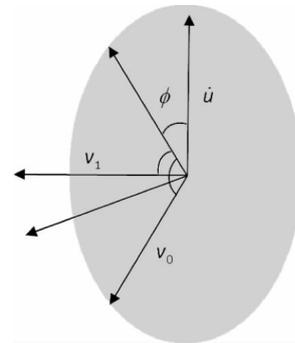


图 3 旋转轴 u 的计算

对于任意的  $\phi$  将  $v_0, v_1$  投影到以  $u$  为法向量的平面上,并分别记为  $\hat{v}_0, \hat{v}_1$ 。设  $\psi$  为  $\hat{v}_0$  和  $\hat{v}_1$  的夹角,则  $\theta = \psi / (n - 1)$ ,这样可以满足式(13)并保证  $\alpha_3$  点的切线方向。为满足  $\alpha_3$  点的位置条件,可用最优化方法让式(15)趋近于 0 得到:

$$f(\phi, s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_0 M^i v_0}{\left| \sum_{i=0}^{n-1} b_0 M^i v_0 \right|} \cdot \frac{\alpha_3 - \alpha_0}{|\alpha_3 - \alpha_0|} - 1 \quad (15)$$

这样就可交互地产生典型的空间 A 级贝塞尔曲线。

### 4 典型平面 A 级贝塞尔曲线与对数螺线

对数螺线广泛存在于自然界,在复平面极坐标下,对数螺线可表达为:

$$LS(\theta) = r_0 e^{ik\theta} \quad (16)$$

其中  $i$  是虚数单位,  $r_0 (> 0)$  和  $k(0 \leq \cot(k) \leq \pi)$  是常数。螺旋线绕着极点  $\rho$  旋转。切线角  $\theta$  是  $x$  轴与从极点  $\rho$  到  $LS(\theta)$  的向量间的夹角。从极点到曲线  $LS(\theta)$  上一点的距离为  $|LS(\theta)| = r_0 e^{k\theta}$ 。

分别考虑对数螺线上两点  $\theta_0$  和  $\theta_0 + \theta_d$  ( $\theta_d > 0$ ),可得式(17)的结果为常数。

$$\frac{|LS(\theta_0 + \theta_d)|}{|LS(\theta_0)|} = e^{k\theta_d} \quad (17)$$

若切线角随  $\theta_d$  增加,极点到曲线的距离就会随因子  $e^{k\theta}$  增

加。反之,对一条确定的曲线,当切线角随  $\theta_d$  增加时极点到曲线的距离随因子  $e^{k\theta_d}$  增加时,因可轻易地找到式(16)中所有的参数,则该曲线是对数螺线。此性质可证明通过给定一条  $n$  次 A 级贝塞尔曲线所有的控制点的曲线是一条对数螺线。当  $n$  很大时,典型的平面 A 级贝塞尔曲线趋近于对数螺线<sup>[4-9]</sup>。

对于一条 A 级贝塞尔曲线的控制点  $b_i, b_{i+1}, b_{i+2}$ ,若能找到对于任意  $i$  的极点,则当  $|b_{i+1} - \rho| / |b_i - \rho| = |b_{i+2} - b_{i+1}| / |b_{i+1} - b_i| = s$  时,存在一条通过所有控制点的对数螺线。这里  $S$  是典型的平面 A 级贝塞尔曲线的尺度因子。要找到对数螺线的极点  $\rho$  就需使得三角形  $\rho b_i b_{i+1}$  与  $\rho b_{i+1} b_{i+2}$  相似。极点存在于与点  $b_{i+1}$  距离为与点  $b_i$  距离  $S$  倍的点  $C$  的轨迹 Apollonius 圆上(如图 4 所示)。

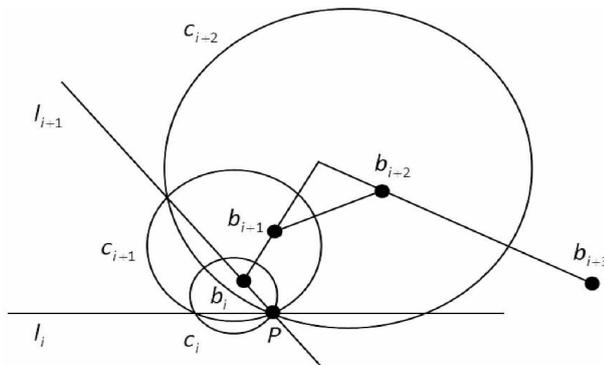


图 4 Apollonius 圆产生贝塞尔控制点

为计算极点  $\rho$ , 需先计算  $b_i$  和  $b_{i+1}$  的 Apollonius 圆  $C_i$ 。Apollonius 圆  $C_i$  是满足  $|b_{i+1} - q| / |b_i - q| = s$  的点  $q$  的轨迹, 这里  $s = |b_{i+2} - b_{i+1}| / |b_{i+1} - b_i|$ 。通过相似的方式, 可分别构造  $b_{i+1}, b_{i+2}$  和  $b_{i+2}, b_{i+3}$  的 Apollonius 圆  $C_{i+1}, C_{i+2}$ 。通过圆  $C_i$  和  $C_{i+1}$ , 可构造一条通过两圆两个交点的直线  $l_i$ 。同样, 我们可以构造圆  $C_{i+1}$  和  $C_{i+2}$  的直线  $l_{i+1}$ 。极点  $\rho$  就是两条直线  $l_i$  和  $l_{i+1}$  的交点, 通过检验交点是否在圆  $C_i$  上, 可计算出极点  $\rho$ 。

设  $b_0 = [b_{0x}, b_{0y}]^T$  为第一个控制点向量,  $\mu = [u_x, u_y]^T$  为平行于  $b_1 - b_0$  的单位向量。典型平面 A 级贝塞尔曲线的其他控制点由式(8)给出。对于控制点  $b_0, b_1, b_2, b_3$ , 极点  $\rho$  可用式(18)计算出:

$$\rho = [\rho_x / \rho_w, \rho_y / \rho_w]^T \tag{18}$$

这里:

$$\begin{aligned} \rho_x &= b_{0x} + b_{0x}s^2 + u_x - s((2b_{0x} + u_x) \cos\theta + u_y \sin\theta) \\ \rho_y &= b_{0y} + b_{0y}s^2 + u_y - s((2b_{0y} + u_y) \cos\theta + u_x \sin\theta) \\ \rho_w &= 1 + s^2 - 2s \cos\theta \end{aligned} \tag{19}$$

因极点  $\rho$  在圆  $C_i, C_{i+1}$  和  $C_{i+2}$  上, 所以对于三次典型 A 级贝塞尔曲线, 也可算出它的极点  $\rho$ 。对四次的 A 级贝塞尔曲线, 可通过利用关系  $|b_2 - \rho| / |b_3 - \rho| = |b_3 - b_2| / |b_4 - b_3|$  和  $\angle \rho b_2 b_3 = \angle \rho b_3 b_4$  简单地说明三角形  $\rho b_2 b_3$  与  $\rho b_3 b_4$  相似。对  $n$  次的 A 级贝塞尔曲线, 重复该过程, 可确定三角形  $\rho b_i b_{i+1}$  与  $\rho b_{i+1} b_{i+2}$  ( $i > 3$ ) 相似, 其极点  $\rho$  就可由式(18)表示。

### 5 对数曲率图及对数挠率图

若分别用  $\log \rho$  和  $\log(ds/d(\log \rho)) = \log(\rho |ds/d\rho|)$  作为对数曲率图的横轴和纵轴<sup>[9]</sup>。设  $\rho$  为曲率半径,  $s$  为弧长且  $\rho$  随  $s$  单调增加, 则可写出一个基本的线性方程(20):

$$\log\left(\rho \frac{ds}{d\rho}\right) = \alpha \log \rho + c \tag{20}$$

其中  $\alpha$  是对数曲率图中直线的斜率,  $c$  是一常数。从式(20)可导出关于弧长的曲率方程:

$$k = \begin{cases} e^{-\Delta s} & \alpha = 0 \\ (\Delta \alpha s + 1)^{-1/\alpha} & \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{21}$$

其中  $k$  是曲率,  $\Delta$  是当  $\rho = 1$  时的  $d\rho/ds$ 。因此, 对数曲率图的直线性表明曲线的曲率是弧长的一个简单函数。

对于任意参数曲线的对数曲率图。横轴  $\log \rho$  可很容易算出, 纵轴  $\log(\rho |ds/d\rho|)$  可通过式(22)计算:

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{1}{k^2} \frac{dk}{ds} \tag{22}$$

同样也可得到以  $\log \mu$  为横轴, 以  $\log(\mu |ds/d\mu|)$  为纵轴的对数挠率图<sup>[9]</sup>。对数挠率图基本的线性表达式为式(23):

$$\log\left(\mu \frac{ds}{d\mu}\right) = \alpha \log \mu + d \tag{23}$$

类似地, 横轴  $\log \mu$  可很容易算出, 纵轴  $\log(\mu |ds/d\mu|)$  可通过式(24)计算:

$$\frac{d\mu}{ds} = -\frac{1}{\tau^2} \frac{d\tau}{ds} \tag{24}$$

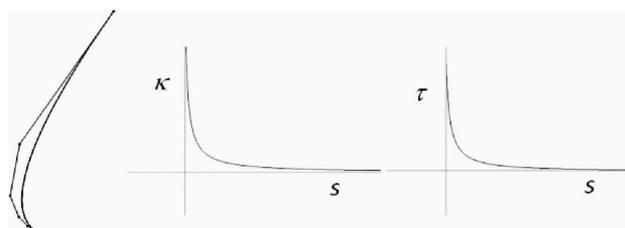
### 6 实验结果及分析

图 5-图 9 显示了使用下降单纯型法进行最优化求解所得到的结果。

图 5(a) 显示了给定一起始向量  $V$  和满足 A 级条件的旋转矩阵  $M$  后生成的 6 次基本 A 级贝塞尔曲线。这里  $V = [-1, 1]$ ,  $M = \begin{bmatrix} 2.58 & -0.04 & 0.89 \\ 0.45 & 2.13 & 0.45 \\ 0 & 0 & 2.21 \end{bmatrix}$ 。图 6(a) 显示了给定平面上三

点来确定曲线段两端点切向时生成的 49 次平面典型 A 级贝塞尔曲线。图 7(a) 为给定平面上三个点和矩阵  $M$  的扰动因子  $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.1$  时生成的 9 次平面一般 A 级贝塞尔曲线。图 8(a) 显示了指定空间中四点定义曲线两端点切向时生成的 7 次空间 A 级贝塞尔曲线。图 9(a) 为指定空间中四点定义曲线两端点切向和给定矩阵  $M$  的扰动因子  $\delta_0 = 0.0, \delta_1 = 0.15, \delta_2 = 0.0, \delta_3 = 0.5$  时生成的 4 次空间一般 A 级贝塞尔曲线。

图 5(b)-图 9(b) 显示了对应于图 5(a)-图 9(a) 的曲率图; 图 5(c)、图 8(c)-图 9(c) 显示了相应的挠率图; 图 6(c)-图 7(c) 和图 8(d)-图 9(d) 显示了对应于图 6(a)-图 9(a) 的对数曲率图; 图 8(e)-图 9(e) 显示了对应于图 8(a)-图 9(a) 的对数挠率图。实验结果显示, 这样的交互式控制方式能简便快速地生成曲率/挠率单调的 A 级贝塞尔曲线, 且能忠实评价曲率/挠率的单调程度。



(a) 产生曲线 (b) 曲率图 (c) 挠率图

图 5 产生的 6 次 A 级贝塞尔曲线及曲率图、挠率图

(下转第 194 页)

- [ 3 ] Fisher R A. The use of multiple measurements in taxonomic problems [J]. *Annals of Eugenic* ,1936 ,7( 2) : 179-188.
- [ 4 ] Zhang Z Y ,Zha H Y. Principal manifolds and nonlinear dimensionality reduction via local tangent space alignment [J]. *SIAM Journal of Scientific Computing* ,2004 ,26( 1) : 313-338.
- [ 5 ] Tenenbaum J B ,Silva V ,Langford J C. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction [J]. *Science* ,2000 ,290 ( 5500) : 2319-2323.
- [ 6 ] Roweis S T ,Saul L K. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding [J]. *Science* ,2000 ,290( 5500) : 2323-2326.
- [ 7 ] Donoho D L ,Grimes C. Hessian eigenmaps: locally linear embedding , techniques for high-dimensional data [J]. *PNAS* ,2003 ,100 ( 10) : 5591-5596.
- [ 8 ] He X ,Cai D ,Yan S , et al. Neighborhood preserving embedding [C]//*Proceeding of IEEE International Conference Computer Vision* , 2005: 1208-1213.
- [ 9 ] He X ,Niyogi P. Locality preserving projections [C]//*Advances in Neural Information Processing Systems 16* ,Vancouver ,British Columbia ,Canada ,2003: 153-160.
- [10] Kokiopoulou E ,Saad Y. Orthogonal neighborhood preserving projections [C]//*IEEE International Conference of Data Mining ( ICDM )* , Houston ,Texas ,America ,2005: 234-241.
- [11] 谢钧 ,刘剑. 一种新的局部判别投影方法 [J]. *计算机学报* , 2011 ,34( 11) : 2243-2250.

(上接第 105 页)

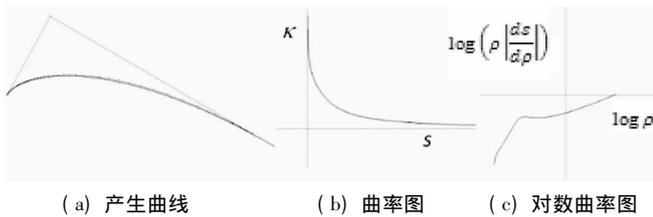


图 6 产生的 49 次平面典型 A 级贝塞尔曲线及曲率图、对数曲率图

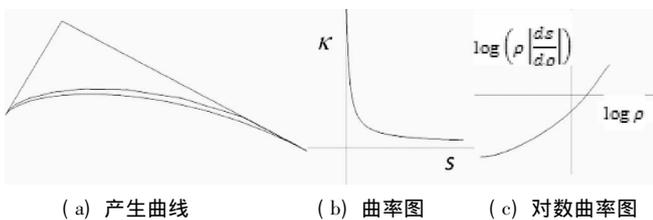


图 7 产生的 9 次平面一般 A 级贝塞尔曲线及曲率图、对数曲率图

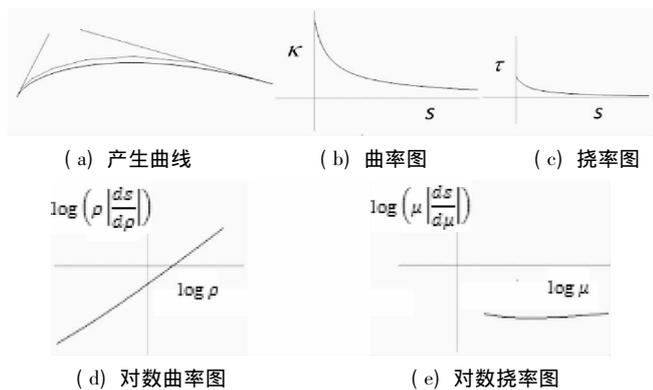


图 8 产生的 7 次空间典型 A 级贝塞尔曲线及曲率图、挠率图、对数曲率图、对数挠率图

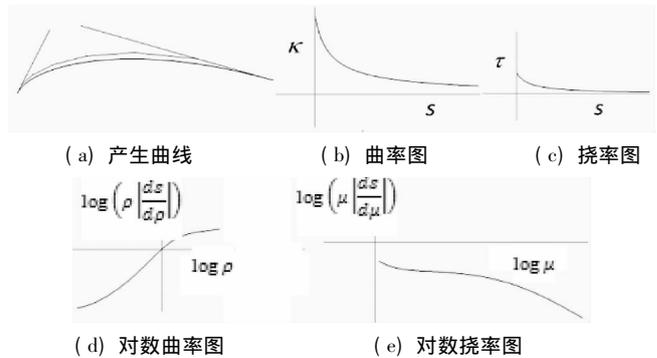


图 9 产生的 4 次空间一般 A 级贝塞尔曲线及曲率图、挠率图、对数曲率图、对数挠率图

### 7 结 语

本文在介绍 A 级贝塞尔曲线的定义和性质的基础上 ,分别说明了交互式控制产生平面和空间 A 级贝塞尔曲线的方法。根据旋转矩阵是否含扰动因子可将此类曲线分类为典型 A 级贝塞尔曲线和一般 A 级贝塞尔曲线。通过阐明 A 级贝塞尔曲线与对数螺线的关系 ,阐明了使用对数曲率 / 挠率图直观表示 A 级贝塞尔曲线曲率 / 挠率单调性的基本原因。

作为进一步的研究内容 如何通过简易的交互式控制即可生成 A 级 B-样条曲线曲面是具有重要意义和挑战性的研究方向。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Mineur Y. A shape controlled fitting method for Bézier curves [J]. *Computer Aided Geometric Design* ,1998 ,15( 9) : 879-891.
- [ 2 ] Farin G. Class A Bézier Curves [J]. *Computer-Aided Geometric Design* ,2006 ,23( 7) : 573-581.
- [ 3 ] Cao J ,Wang G. A note on Class A Bézier curves [J]. *Computer Aided Geometric Design* ,2007: doi: 10. 1016/j. cagd. 2007. 10. 001.
- [ 4 ] Yoshida N ,Saito T. Interactive Control of Planar Class A Bézier Curves using Logarithmic Curvature Graphs [J]. *Computer-Aided Design & Applications* ,2008 ,5( 1-4) : 121-130.
- [ 5 ] Norimasa Yoshida ,Ryo Fukuda ,Takafumi Saito. Interactive Generation of 3D Class A Bézier Curve Segments [J]. *Computer-Aided Design & Applications* ,2010 ,7( 2) : 163-172.
- [ 6 ] Ryo Fukuda ,Norimasa Yoshida ,Takafumi Saito. Interactive Generation of 3D Class A Bezier Curves and the Characteristics of 3D Typical Curves [J]. *Journal of the Japan Society of Precision Engineering* , 2010 ,78( 5) : 587-591.
- [ 7 ] Ryo Fukuda ,Norimasa Yoshida ,Takafumi Saito Interactive Control of 3D Class-A Bzier Curves [C]. *SIGGRAPH ASIA ,Sketches* ,2008.
- [ 8 ] Yoshida N ,Saito T. Interactive Aesthetic Curve Segments [J]. *The Visual Computer ( Proc. of Pacific Graphics )* ,2006 ,22( 9-11) : 896-905.
- [ 9 ] Yoshida N ,Fukuda R ,Saito T. Logarithmic Curvature and Torsion Graphs [C]//*Mathematical Methods for Curves and Surfaces 2008* edited by Daehlen et al. ,2010 ,LNCS 5862 ,Springer: 434-443.
- [10] Levien R L. From Spiral to Spline: Optimal Techniques in Interactive Curve Design [M]. PhD thesis , University of California , Berkeley , California ,2009.
- [11] William H Press ,Saul A Teukolsky ,William T Vetterling et al. C++ 数值算法 [M]. 北京: 电子工业出版社 ,2005: 305-308.
- [12] Schneider Philip J ,Eberly David H. 计算机图形学几何工具算法详解 [M]. 北京: 电子工业出版社 ,2005.